Q-C-M :

1. a. La distance MM'=$|z-z'|$
   b. O,M et M' sont alignées.
   c. z=iz'
2. A ,B et C sont alignées.
3. (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

VRAI FAUX

1. Faux ; il suffit de prendre z_1=3i et z_2= 1+2i
2. Faux ;il suffit de prendre z = $e^{i\frac{\pi}{3}}$
3. Faux ; il suffit de prendre z=1 et z'=i

EX 1 page 19 :

$2i+\frac{1}{i}-1=2i-i-1=-1+i$

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}=\frac{(1+i\sqrt{3}).(\sqrt{3}+i)}{3+1}=i$$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2=i^2=-1$$

$$\frac{(1-i)(2+i)}{i-2}=\frac{(1-i)(2+i)^2}{-5}=\frac{(1-i)(3+4i)}{-5}$$

$$=-\frac{7}{5}-\frac{1}{5}i$$

EX 2 page 19 :

$$A=\frac{(3-2i)(5+i)}{3i(7+2i)}=\frac{17-7i}{-6+21i}\Rightarrow \bar{A}=\frac{17+7i}{-6-21i}$$

$$B=\left(\frac{i-3}{1+i}\right)^2=\frac{8-6i}{2i}=-3-4i$$

$$\Rightarrow \bar{B}=-3+4i$$

C= (2-i)(3+2i)(2+i)(3-2i)

= (2-i)(2+i) (3+2i) (3-2i) =5X13=65

$$\Rightarrow \bar{C}=65$$

EX 3PAGE 19

$\overline{Z_1}$=...=Z_1 donc Z_1 est un réel

$Z_3=\overline{Z_2}$ donc Z_3+Z_2 est un réel

et Z_3-Z_2 est imaginaire.

EX 4 PAGE 19

1. L'ensemble des points M d'affixe z=a+i(a+1) avec a$\in$IR
   Est la droite d'éq :y=x+1
2. L'ensemble des points M d'affixe z=2isin($\frac{a}{2}$) avec a$\in$[0,2π [est le segment [AB]
   Avec A(-2i) et B(2i).
3. a(z-i)=i(z+1) avec a$\in$$IR^*$ est équivaut à $\frac{z-i}{z+1}$ imaginaire et z$\notin${-1,i}

donc l'ensemble des points est le cercle de diamètre [AB] avec A(i) et B(-1),privé de A et B.

EX 5 PAGE 19

$|(1+i)^4|=|1+i|^4=\sqrt{2}^4=4$

$|(2-3i)^2|=|2-3i|^2=\sqrt{13}^2=13$

$|(-2+i)(1-3i)(1-4i)|=$

$|-2+i||1-3i||1-4i|$
$=\sqrt{5}\sqrt{10}\sqrt{17}=\sqrt{850}$

$$\left|\frac{1-5i}{i+2\sqrt{3}}\right|=\frac{|1-5i|}{|i+2\sqrt{3}|}=\frac{\sqrt{26}}{\sqrt{13}}=\sqrt{2}$$

EX 6 PAGE 19

1. $\bar{Z}=\frac{1}{Z}\Leftrightarrow Z.\bar{Z}=1\Leftrightarrow |Z|^2=1$

$\Leftrightarrow |Z|=1$

2. $|Z_1|=|Z_2|=1\Rightarrow \overline{Z_1}=\frac{1}{Z_1}$ $et\bar{Z}_2=\frac{1}{Z_2}$

$$\Rightarrow\overline{\left(\frac{Z_1+Z_2}{1+Z_1Z_2}\right)}=\frac{\overline{Z_1}+\overline{Z_2}}{1+\overline{Z_1}.\overline{Z_2}}=\frac{\frac{1}{Z_1}+\frac{1}{Z_2}}{1+\frac{1}{Z_1}.\frac{1}{Z_2}}$$

$=\frac{Z_1+Z_2}{1+Z_1Z_2}$ donc $\frac{Z_1+Z_2}{1+Z_1Z_2}$ est réel

EX 7 PAGE 19

On désigne par M le point d'affixe z

* $|Z|=|Z^2|\Leftrightarrow |Z|=|Z|^2$

$\Leftrightarrow |Z|=1$ ou $|Z|=0$

$\Leftrightarrow$ M=O ou Mϵ Cercle trigo (1)

* $|Z|=|1-Z|\Leftrightarrow$ OM=AM avec $Z_A=1$

$\Leftrightarrow$ M$\epsilon\Delta$:x=1/2 (Δ:med de [AO]) (2)

(1) Et (2) $\Rightarrow Z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $Z=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

EX 8 PAGE 19

1. $z'=z^2\Leftrightarrow z'=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi$

$\Rightarrow$Réel(z')=x^2-y^2 et Im(z')=2xy

2. z' réel$\Leftrightarrow$ 2xy=0$\Leftrightarrow$x=0 ou y=0

$\Rightarrow$L'ensemble des points M est la réunion de deux axes du repère.

3. z' imaginaire $\Leftrightarrow x^2-y^2=0$

$\Leftrightarrow$(x-y)(x+y)=0$\Leftrightarrow$y=x ou y=-x

$\Rightarrow$L'ensemble des points M est la réunion de deux droites

D :y=x la 1ere bissectrice

et D' :y=-x la 2ere bissectrice

EX 9 PAGE 19

1. $Z_I=\frac{Z_B+Z_C}{2}=\frac{2-2i}{2}$=1-i
2. a/

AB=$|Z_B-Z_A|=|-3-i|=\sqrt{10}$

AC=$|Z_C-Z_A|=|1-3i|=\sqrt{10}$

BC=$|Z_C-Z_B|=|4-2i|=\sqrt{20}$

b/ AB=AC $\Rightarrow$ ABC isocèle en A

$AB^2+AC^2=BC^2\Rightarrow$ABC rectangle en A

Cclusion : ABC est un triangle isocèle et rectangle en A

3. a/ D=S_I(A)$\Rightarrow\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{ID}$

$\Rightarrow Z_D-Z_I=Z_I-Z_A$

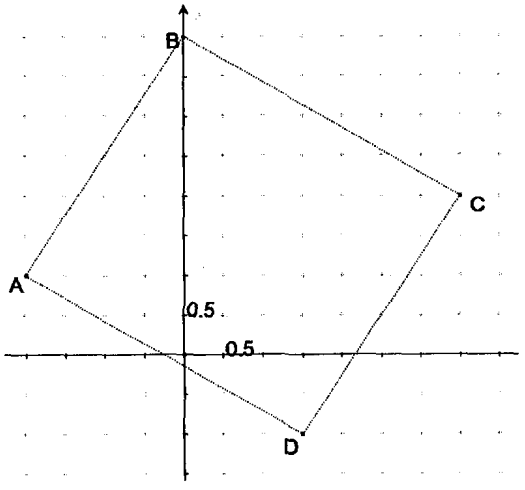
$\Rightarrow Z_D=Z_I+Z_I-Z_A=2-2i-2-i=-3i$

b/ on a I=A*D=B*C$\Rightarrow$ABDC #

et on a : ABC triangle rectangle et isocèle en A

Donc ABDC est un carré

EX 10 PAGE 19



A(-2,1) ;B(0,4) ;C($\frac{7}{2}$,2) ;D($\frac{3}{2}$,-1)

$Z_B-Z_A=4i-(-2+i)=2+3i$

$Z_C-Z_D=\frac{7}{2}+2i-\left(\frac{3}{2}-i\right)=2+3i$

$\Rightarrow Z_B-Z_A= Z_C-Z_D \Rightarrow$ABCD#

EX 11 PAGE 19

1) $|\bar{z}-1+2i|=3\Leftrightarrow$

$|z-1-2i|=3\Leftrightarrow$

$|z-(1+2i)|=3\Leftrightarrow$

AM= 3 avec Z_A=1+2i

Donc E est le cercle de centre le point A(1 ;2) et de rayon 3

2) $\left|\frac{iz+1-i}{\bar{z}+2+i}\right|=1\Leftrightarrow$

$\frac{|i(z-i-1)|}{|z+2-i|}=1\Leftrightarrow$

$\frac{|i||z-(1+i)|}{|z-(-2+i)|}=1\Leftrightarrow$

CM=BM avec Z_C=1+i et Z_B= -2+i

Donc l'ensemble E est la droite médiatrice de [BC].

(représentation graphique : t .facile)

EX 12 PAGE 20 OBC est équilatéral

Z_A=-2+2i$\Rightarrow|Z_A|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

et Arg(Z_A)=$\frac{3\pi}{4}$

$|Z_B|=|Z_A|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

Arg(Z_B) =Arg(Z_A)-$\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{12}$

Z_C= 2 $\Rightarrow|Z_C|=2\ et\ Arg(Z_C)=0$

Z_D=-1-i$\Rightarrow|Z_D|=\sqrt{2}\ et\ Arg(Z_D)=-\frac{3\pi}{4}$

EX 13 PAGE 20

$|Z_A|=1{,}5$ et Arg(Z_A)=$\frac{\pi}{6}$

$|Z_B|=|Z_A|=1{,}5$ et Arg(Z_B) =$\frac{\pi}{3}$

$|Z_C|$= 1,5 $et\ Arg(Z_C)=\frac{2\pi}{3}$

$|Z_D|=1{,}5\ et\ Arg(Z_D)=\frac{5\pi}{6}$

$|Z_E|$= 1,5 $et\ Arg(Z_E)=-\frac{2\pi}{3}$

$|Z_F|=1{,}5$ et Arg(Z_B) =$-\frac{\pi}{3}$

EX 14 PAGE 20

a. *-8i=8.(cos(-$\frac{\pi}{2}$) + $isin(-\frac{\pi}{2})$)

*$\frac{-1+i}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i.sin(\frac{3\pi}{4})$

* $3i+\sqrt{3} = \sqrt{3}(1 + i\sqrt{3})$

=$2\sqrt{3}.$ (cos ($\frac{\pi}{3}$)+i.sin($\frac{\pi}{3}$))

- -2,5=2,5.(cos(π)+isin(π))
- $\sqrt{2} - \sqrt{6}i = \sqrt{2}(1 - i\sqrt{3})$

=$2\sqrt{2}.$ (cos ($-\frac{\pi}{3}$)+i.sin($-\frac{\pi}{3}$))

- 5+5i=$5\sqrt{2}$ (cos $\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin(\frac{\pi}{4})$)

b. *$\frac{3(1+i\sqrt{3})}{(1+i)^2} = \frac{6e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{2}}} = 3e^{-i\frac{\pi}{6}}$

= 3.(cos(-$-\frac{\pi}{6}$) + $isin(-\frac{\pi}{6})$)

* $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = i$

$= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isin(\frac{\pi}{2})$

* $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}\right)^3 = \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}\right)^3$

$=\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^3 = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isin(\frac{\pi}{2})$

* $(1-i)^5(1+i)^3 = 4\sqrt{2}e^{-i5\frac{\pi}{4}}.2\sqrt{2}e^{i3\frac{\pi}{4}}$

$=16e^{-i\frac{\pi}{2}}$

$=16(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + isin(-\frac{\pi}{2})$

EX 15 PAGE 20

1) $|Z_1| = |1 + i| = \sqrt{2}$

Arg(Z_1)=$\frac{\pi}{4}$

$|Z_2| = |\sqrt{3} - i| = 2$

Arg(Z_2)=$-\frac{\pi}{6}$

2) $Z_1.Z_2$=(1+i)($\sqrt{3} - i$)

=(1+$\sqrt{3}$)+i(-1+$\sqrt{3}$)

$Z_1.Z_2 = 2.\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\mu}{6}\right)} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$

$= 2\sqrt{2}\,(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + isin(\frac{\pi}{12}))$

3) $2\sqrt{2}\,(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + isin(\frac{\pi}{12})) =$

$(1 + \sqrt{3}) + i(-1 + \sqrt{3})$

$\Rightarrow\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

et $sin(\frac{\pi}{12})) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

EX 16 PAGE 20

1. $|Z_1| = |-1 + i\sqrt{3}| = 2$

Arg(Z_1)=$\frac{2\pi}{3}$

$|Z_2| = |1 + i| = \sqrt{2}$

Arg(Z_2)=$\frac{\pi}{4}$

2.

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg(z_1) - \arg(z_2) = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$$

3. $\frac{z_1}{z_2}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$rel(\frac{z_1}{z_2})=\sqrt{2}.\cos(\frac{5\pi}{12})=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\Rightarrow\cos(\frac{5\pi}{12})=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

$\mathrm{Im}(\frac{z_1}{z_2})=\sqrt{2}.\sin(\frac{5\pi}{12})=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\sin(\frac{5\pi}{12})=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

EX 17 PAGE 20

$e^{-i\frac{\pi}{4}}=\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$e^{2i\frac{\pi}{3}}=\cos(2\frac{\pi}{3})+i\sin(2\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{e^{i\pi}}{4}=\frac{-1}{4}$

$2ie^{i\frac{\pi}{6}}=2i(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2})=-1+i\sqrt{3}$

EX 18 PAGE 20

$2\sqrt{3}-2i=4(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i)=4e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$-5-5i=5(-1-i)=5\sqrt{2}.e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

$-1+i\sqrt{3}=2(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=2.e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$\frac{1+i}{\sqrt{2}}=e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\cos(\frac{\pi}{5})-i\sin(\frac{\pi}{5})=\cos(-\frac{\pi}{5})+i\sin(-\frac{\pi}{5})=e^{-i\frac{\pi}{5}}$

EX 19 PAGE 20

1. $z=\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}=\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)}=e^{i\frac{\pi}{6}}$

2. $z^6=\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^6=e^{i\frac{\pi}{6}.6}=e^{i\pi}=-1$

EX 20 PAGE 20

1. $-1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

2. $(-1+i)^{11}=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^{11}$

$=\sqrt{2}^{11}e^{i\frac{33\pi}{4}}=32\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$=32.(1+i)=32+32i$

EX 21 PAGE 20

1. L'ensemble des points M d'affixe z tel que $z=2e^{i\theta}$ avec $\theta\in[0;\pi]$ est le demi-cercle de centre le point O et de rayon 2 située dans le demi plan $y\geq O$.
2. L'ensemble des points M d'affixe z tel que $z=-2e^{i\theta}$ avec $\theta\in[0;\pi]$ est le demi-cercle de centre le point O et de rayon 2 située dans le demi plan $y\leq O$.
3. L'ensemble des points M d'affixe z tel que $z=2+\cos(\theta)+i\sin(\theta)=2+e^{i\theta}$ avec $\theta\in[0;2\pi[$ est le cercle de centre le point I(2 ;0) et de rayon 1

(faire une figure pour chaque cas)

EX 22 PAGE 21

1.

$1+e^{i\theta}=e^{i0}+e^{i\theta}=e^{i\frac{\theta}{2}}\underbrace{\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right)}_{formue\,d'Euler}$

$=2\cos\frac{\theta}{2}.e^{i\frac{\theta}{2}}$

$1-e^{i\theta}=e^{i0}-e^{i\theta}=e^{i\frac{\theta}{2}}\underbrace{\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}\right)}_{formue\,d'Euler}$

$=-2i\sin(\frac{\theta}{2}).e^{i\frac{\theta}{2}}$

2.

$$|1+e^{i\theta}|=\left|2\cos\frac{\theta}{2}.\right|e^{i\frac{\theta}{2}}=2\cos\frac{\theta}{2}.(car\ \frac{\theta}{2}\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[)$$

$$Arg\left(1+e^{i\theta}\right)=Arg(\ 2\cos\frac{\theta}{2}\ e^{i\frac{\theta}{2}}\ )=\frac{\theta}{2}$$

$$|1-e^{i\theta}|=\left|-2i\sin(\frac{\theta}{2}).e^{i\frac{\theta}{2}}\right|=2\sin(\frac{\theta}{2})$$

$$Arg\left(1-e^{i\theta}\right)=Arg(-2i\sin(\frac{\theta}{2})\ e^{i\frac{\theta}{2}}\ )=\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2}$$

EX 2 3 PAGE 21

1) $Z=\cos(\theta)-i\sin(\theta)=\overline{\cos(\theta)+i\sin(\theta)}$

$$=\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$$

2) $Z=\sin(\theta)+i\cos(\theta)$

$$=\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)+i\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}$$

3) $Z=-\cos(\theta)-i\sin(\theta)=-(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$

$$=-e^{i\theta}=e^{i(\pi+\theta)}$$

4) $Z=1+i.\tan(\theta)=\dfrac{\cos(\theta)+i\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$

$$=\frac{1}{\cos(\theta)}e^{i\theta}(\cos(\theta)>0)$$

5) $Z=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}=\dfrac{2i\sin(\theta)}{2\cos(\theta)}=\tan(\theta)e^{i\frac{\pi}{2}}$

$*\ pour\ \theta\in\left]-\frac{\pi}{2};0\right[\ Z=-\tan(\theta)e^{i(-\frac{\pi}{2})}$

$*\ pour\ \theta\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[\ Z=\tan(\theta)e^{i\frac{\pi}{2}}$

EX 2 4 PAGE 21

1. M(t)∈ζ et $\widehat{\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)}\equiv\alpha\Rightarrow t=e^{i\alpha}\Rightarrow$

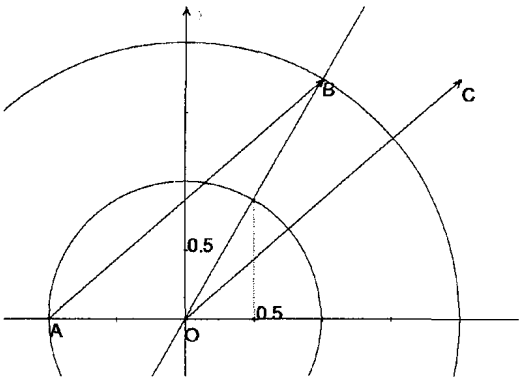
U=$t^3=e^{i3\alpha}$ =cos(3α)+isin(3α)

et v=2t=2(cos(α)+isin(α))

2. Pour $\alpha=\frac{\pi}{3}\Rightarrow U=-1\Rightarrow A(-1;0)$

$W=2t-t^3=Z_B-Z_A$

$\Rightarrow\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}\Rightarrow C=t_{\overrightarrow{AB}}(O)$



3. O ;A et B alignées ssi $\frac{aff(\overrightarrow{OA})}{aff(\overrightarrow{OB})}$ réel

Ssi $\frac{t^3}{2t}=½t^2$ réel

Ssi 2α=k.π⇔α=k.π/2 or α∈[0 ;π/2]

Donc **O ;A et B sont alignées pour α=π/2 ou α=0**

4. a/ On a

$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}\Rightarrow OABC\ est\ un\ parallèlogramme$

b/ OABC rectgle ssi $AC=OB=2$

ssi

$$|2t-2t^3|=2$$

$$\Leftrightarrow|t-t^3|=1\Leftrightarrow|1-t^2|=1\ car|t|=1$$

$$\Leftrightarrow 2\sin(\alpha)=\pm1\ (d'après\ Ex22)$$

$$or\ \alpha\in\left]O;\frac{\pi}{2}\right[\ \Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{6}$$

Conclusion : OABC est un rectangle pour α=π/6

EX 2 5 PAGE 21

$z=e^{i2\theta}-i\Rightarrow\bar{z}=e^{-i2\theta}+i$

1. Soit I le milieu de [MM']

$\Rightarrow Z_I=\frac{z+\bar{z}}{2}=\cos(2\theta)$

OMNM' losange⇒ I milieu de [ON]

⇒ L'affixe du point N est :2cos(2θ)

2. a/

$$z = e^{i2\theta} - i = e^{i2\theta} + e^{-i\frac{\pi}{2}}$$
$$= e^{i\frac{2\theta-\frac{\pi}{2}}{2}}\left(e^{i\frac{2\theta+\frac{\pi}{2}}{2}} + e^{-i\frac{2\theta+\frac{\pi}{2}}{2}}\right)$$
$$= e^{i(\theta-\frac{\pi}{4})}.2\cos(\theta+\frac{\pi}{4})$$
$$= 2\cos(\theta+\frac{\pi}{4})e^{i(\theta-\frac{\pi}{4})}$$

b/ $\frac{\bar{z}}{z} = \frac{2\cos(\theta+\frac{\pi}{4})e^{i(\theta-\frac{\pi}{4})}}{2\cos(\theta+\frac{\pi}{4})e^{-i(\theta-\frac{\pi}{4})}} = e^{i(2\theta-\frac{\pi}{2})}$

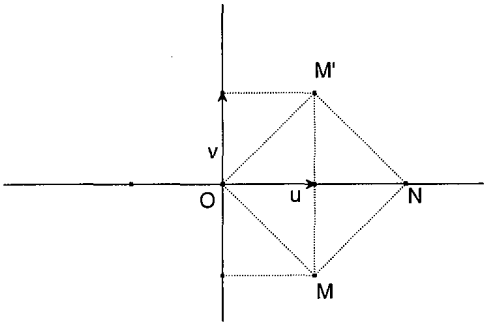
c/ On a OMNM' est un losange ⇒

OMNM' carré ssi OMN rctgle en O

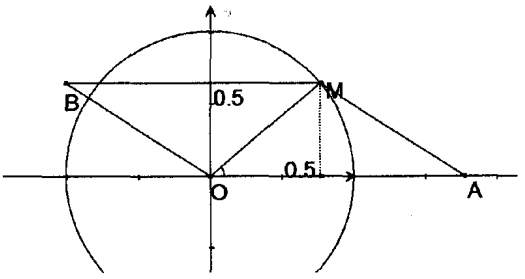
$$ssi\ \frac{z}{\bar{z}} imaginair$$
$$ssi\ 2\theta-\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi\ ; k\in\mathbb{Z}$$
$$ssi\ \theta = \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}\ or \theta\in\left[O;\frac{\pi}{4}\right[$$
$$\Rightarrow \theta = 0$$

d/ pour θ=0 ⇒ z=1-i

⇒M(1 ;-1) ;M'(1 ;1) et N(2 ;0)



EX 26 PAGE 21



2. a/ aff($\overrightarrow{BM}$)=Z_M-Z_B

=cos(θ)+i.sin(θ)+1-i.sin(θ)

=1+cos(θ)=aff($\overrightarrow{OA}$)

⇒$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OA}$⇒OAMB est un parallélogramme

b/ OAMB est un losange ssi OA=OB

ssi 1+cos(θ) =$\sqrt{1+sin^2(\theta)}$

ssi 1+2cos(θ)+cos²(θ)=1+sin²(θ)

ssi 2 cos²(θ)+2cos(θ)-1=0

ssi cos(θ)=$\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ ou cos(θ)=$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

et comme $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$∈[-1 ;1] donc il existe une valeur de θ tel que cos(θ)=$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ donc il existe une valeur de θ tel que OAMB est un losange.

c/ cos(θ)=$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ donc θ= 1,2rad

3. A(θ)=(1+cos(θ)).sin(θ)

=sin(θ)+½sin(2θ)

⇒A'(θ)=cos(θ)+cos(2θ)

θ	0	π/3	π/2
A'(θ)	+	0	-
A(θ)	↗		↘

Donc A(θ) est maximale pour θ=π/3

EX 27 PAGE 21

$$z=\frac{1}{2}\left(\sin(\varphi)+i\left(1-\cos(\varphi)\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin(\varphi)-i\left(\cos(\varphi)\right)+i\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)-i\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi)+i\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{i(\varphi-\frac{\pi}{2})}+e^{i\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{i\frac{\varphi}{2}}.\left(e^{i\frac{\varphi-\pi}{2}}+e^{-i\frac{\varphi-\pi}{2}}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(e^{i\frac{\varphi}{2}}.2\cos\left(\frac{\varphi-\pi}{2}\right)\right)$$

$$=\cos\left(\frac{\varphi-\pi}{2}\right).e^{i\frac{\varphi}{2}}\quad(0<\varphi<\pi\Rightarrow\cos\left(\frac{\varphi-\pi}{2}\right)>0)$$

$$Donc\left|z\right|=\cos\left(\frac{\varphi-\pi}{2}\right)=\sin(\frac{\varphi}{2})\quad et\ Arg(z)=\frac{\varphi}{2}$$

2.

$$z_1=z-i=\frac{1}{2}\left(\sin(\varphi)-i\left(\cos(\varphi)-i\right)\right.$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)-i\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi)-i\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{i(\varphi-\frac{\pi}{2})}+e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{i\frac{\varphi-\pi}{2}}.\left(e^{i\frac{\varphi}{2}}+e^{-i\frac{\varphi}{2}}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(e^{i\frac{\varphi-\pi}{2}}.2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)$$

$$=\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right).e^{i\frac{\varphi-\pi}{2}}\ (0<\varphi<\pi\Rightarrow\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)>0)$$

$$Donc\left|z_1\right|=\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\ et\ Arg(z_1)=\frac{\varphi-\pi}{2}$$

$$\left|z_2\right|=\frac{\left|z\right|}{\left|z_1\right|}=\frac{\cos(\frac{\varphi-\pi}{2})}{cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}=tg\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$Arg(z_2)=Arg(z)-Arg(z_1)$$

$$=\frac{\varphi}{2}-\frac{\varphi-\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

3)a/

$$on\ a\ z_1=z-i=\frac{1}{2}\left(e^{i(\varphi-\frac{\pi}{2})}+e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}e^{i(\varphi-\frac{\pi}{2})}-\frac{1}{2}i$$

$$\Leftrightarrow z_1-(-\frac{1}{2}i)=\frac{1}{2}e^{i(\varphi-\frac{\pi}{2})}$$

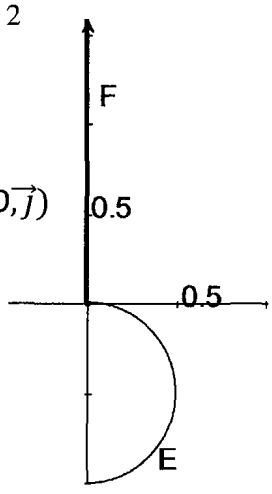
$$\Leftrightarrow z_M-z_A=\frac{1}{2}e^{i(\varphi-\frac{\pi}{2})}\quad avec\ z_A=-\frac{1}{2}i$$

$$\Leftrightarrow z_M-z_A=\frac{1}{2}e^{i\theta}\quad avec\ \theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

$$\Leftrightarrow M\in\frac{1}{2}cercle\ de\ centre\ A\ et\ de\ rayon\ \frac{1}{2}$$

E est le demi-cercle de centre le point A(0,-1/2) et de rayon ½ (Voiy figure)

$$\left|z_2\right|=tg\left(\frac{\varphi}{2}\right)\ \text{et}\ Arg(z_2)=\frac{\pi}{2}$$

$$avec\ \frac{\varphi}{2}\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$$

⇒F est la demi droite $[O,\vec{j})$ privée de O.